

個別要素法を用いたマーガリンの製造工程シミュレーション

- 多要素粘弾性モデルの個別要素法への組み込み -

清水賀之*、伊藤博史**、貞包忠義***

1. はじめに

マーガリンの製造工程において、マーガリンの充填性や均一性を改善するために使用されるピンマシン内の流動現象を明らかに、製造工程プロセスの最適化やピンマシンの性能向上を目的として、(株)J-オイルミルズと東海大学は、2008年度より共同研究「数値解析手法(個別要素法)を用いたマーガリンの製造工程の最適化」を実施している。その中で伊藤、清水(2009)は、個別要素法(Discrete Element Method)を用いてピンマシン内部をモデル化し、混練の効果をつかさどるピン(固定ピンと回転ピン)に相對運動を与えることにより、マーガリンに相当する粒子群の流動ならびに混練状態を観察した。しかしながら使用した力学モデル、すなわち接触時の力と変位の関係が線形モデルであったために、粒子群内部に発生する応力が過大となり、必ずしもピンマシン内部の状況を再現できるとは言い難い。

一般に、バルク全体としてのマーガリンの力学的応答は、多要素粘弾性(クリープ)モデルであらわすことができる(Shama and Sherman 1968)。そこで、個別要素法において、個々の接触点に対して多要素粘弾性(クリープ)モデルを組み込み、全体(バルク)としてのクリープ特性をあらわすとともに、さらに、個々の接触点でのクリープモデルのパラメータを変化させることにより、流動(混練)状態の局所化を再現できるのではないかと考えた。

本報告では、個別要素法の接触モデルに組み込む多要素粘弾性(クリープ)モデルの定式化と離散化について述べる。

* 東海大学海洋学部海洋資源学科 教授 ** (株)J-オイルミルズ 油脂加工技術研究所

*** (株)J-オイルミルズ 油脂加工技術研究所 課長

2. 定式化と離散化

図1および2に示す複数個のKelvin要素とひとつのMaxwell要素が直列に連結されたモデルを考え、このクリープモデルの個別要素法への定式化を行う。個別要素法では、力は要素同士の接触時に発生するので、接触点に関して、垂直方向(図1)とせん断方向(図2)に分けて考察する。それぞれの要素のばねを k とし、ダッシュポットを c とする。また下付添字のうち、1番目は、垂直方向: n あるいはせん断方向: s とし、2番目の下付添字は、Maxwell要素の場合には M 、Kelvin要素の場合には $K_i(i=1-N)$ とする。なお、Kelvin要素は複数個あるので、添字の i は1からその要素数 N までの番号が付加される。以下、垂直方向の定式化を示すが、記号が複雑になるので、1番目の下付添字 n は省略する。

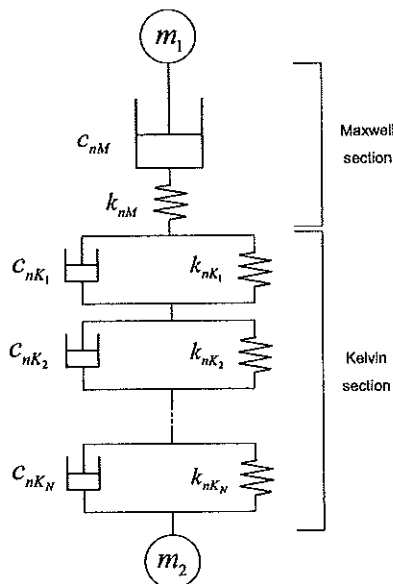


図1 多要素粘弾性モデル(垂直方向)

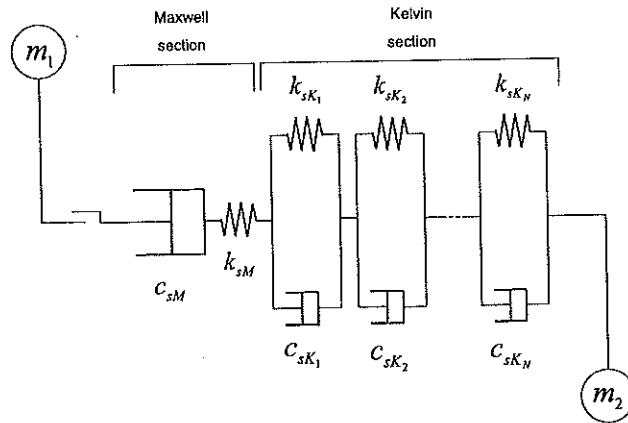


図2 多要素粘弾性モデル(せん断方向)

接触の垂直方向成分について、各Kelvin 要素について、両端に発生する力を f とすると、

$$f = k_{K_i} u_{K_i} + c_{K_i} \dot{u}_{K_i} \quad (i = 1 \sim N) \quad \dots(1)$$

$$\dot{u}_{K_i} = \frac{-k_{K_i} u_{K_i} + f}{c_{K_i}} \quad (i = 1 \sim N) \quad \dots(2)$$

式(2)を差分化すると、

$$\frac{u_{K_i}^{t+1} - u_{K_i}^t}{\Delta t} = \frac{1}{c_{K_i}} \left[-\frac{k_{K_i} (u_{K_i}^{t+1} + u_{K_i}^t)}{2} + \frac{f^{t+1} + f^t}{2} \right] \quad (i = 1 \sim N) \quad \dots(3)$$

式(3)を展開し整理すると、

$$u_{K_i}^{t+1} \left(1 + \frac{\Delta t \cdot k_{K_i}}{2c_{K_i}} \right) = u_{K_i}^t \left(1 - \frac{\Delta t \cdot k_{K_i}}{2c_{K_i}} \right) + \frac{\Delta t}{2c_{K_i}} (f^{t+1} + f^t) \quad \dots(4)$$

したがって、

$$u_{K_i}^{t+\Delta t} = \frac{1}{A_{K_i}} \left[B_{K_i} u_{K_i}^t + \frac{\Delta t}{2c_{K_i}} (f^{t+\Delta t} + f^t) \right] \quad \dots(5)$$

ここに、

$$A_{K_i} = 1 + \frac{\Delta t \cdot k_{K_i}}{2c_{K_i}}$$

$$B_{K_i} = 1 - \frac{\Delta t \cdot k_{K_i}}{2c_{K_i}}$$

また、Maxwell 要素のばねについて、

$$f = k_M u_{M_s} \quad \dots(6)$$

Maxwell 要素のダッシュポットについて

$$f = c_M \dot{u}_{M_c} \quad \dots(7)$$

Maxwell 要素の全体変位は、式(8)で与えられる。

$$u_M = u_{M_s} + u_{M_c} \quad \dots(8)$$

両辺の時間微分をとり、

$$\dot{u}_M = \dot{u}_{M_s} + \dot{u}_{M_c} \quad \dots(9)$$

式(6)、(7)および(9)より、

$$\dot{u}_M = \frac{\dot{f}}{k_M} + \frac{f}{c_M} \quad \dots(10)$$

式(8)を差分化すると、

$$\frac{u_M^{t+1} - u_M^t}{\Delta t} = \frac{f^{t+1} - f^t}{\Delta t \cdot k_M} + \frac{f^{t+1} + f^t}{2c_M} \quad \dots(11)$$

したがって、

$$u_M^{t+1} = u_M^t + \frac{f^{t+1} - f^t}{k_M} + \frac{\Delta t}{2c_M} (f^{t+1} + f^t) \quad \dots(12)$$

全変位は、

$$u = \sum_{i=1}^N u_{K_i} + u_M \quad \dots(13)$$

したがって

$$\begin{aligned} u^{t+1} - u^t &= \sum_{i=1}^N (u_{K_i}^{t+1} - u_{K_i}^t) + u_M^{t+1} - u_M^t \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{B_{K_i}}{A_{K_i}} - 1 \right) u_{K_i}^t + \frac{\Delta t}{2A_{K_i}c_{K_i}} (f^{t+1} + f^t) \right] \\ &\quad + \frac{f^{t+1} - f^t}{k_M} + \frac{\Delta t}{2c_M} (f^{t+1} + f^t) \quad \dots(14) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{B_{K_i}}{A_{K_i}} - 1 \right) u_{K_i}^t + \frac{\Delta t}{2} (f^{t+1} + f^t) \sum_{i=1}^N \frac{1}{A_{K_i}c_{K_i}} \\ &\quad + \frac{f^{t+1} - f^t}{k_M} + \frac{\Delta t}{2c_M} (f^{t+1} + f^t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^{t+1} & \left(\frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{A_{K_i} c_{K_i}} + \frac{1}{k_M} + \frac{\Delta t}{2c_M} \right) + f^t \left(\frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{A_{K_i} c_{K_i}} - \frac{1}{k_M} + \frac{\Delta t}{2c_M} \right) \dots(15) \\
 & = u^{t+1} - u^t + \sum_{i=1}^N \left(\frac{B_{K_i}}{A_{K_i}} - 1 \right) u'_{K_i}
 \end{aligned}$$

したがって、

$$f^{t+1} = \frac{1}{C} \left(u^{t+1} - u^t - \sum_{i=1}^N \left(\frac{B_{K_i}}{A_{K_i}} - 1 \right) u'_{K_i} - D \cdot f^t \right) \dots(16)$$

ここに、

$$C = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{A_{K_i} c_{K_i}} + \frac{1}{k_M} + \frac{\Delta t}{2c_M}$$

$$D = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{A_{K_i} c_{K_i}} - \frac{1}{k_M} + \frac{\Delta t}{2c_M}$$

$$A_{K_i} = 1 + \frac{\Delta t \cdot k_{K_i}}{2c_{K_i}}$$

$$B_{K_i} = 1 - \frac{\Delta t \cdot k_{K_i}}{2c_{K_i}}$$

したがって式(16)より、時刻t、t+1 での変位、および時刻t での各Kelvin 要素での変位、ならびに発生する力から、時刻t+1 の垂直方向の力を求めることができる。

接触点に対してせん断方向の定式化に関して、式(16)と同様に、

$$f^{t+1} = -\frac{1}{C} \left(u^{t+1} - u^t - \sum_{i=1}^N \left(\frac{B_{K_i}}{A_{K_i}} - 1 \right) u'_{K_i} + D \cdot f^t \right) \quad \dots(17)$$

で与えられる。式(17)中の係数は、式(16)と同じで、各係数は、せん断方向に関する係数となる。

3. まとめ

個別要素法を用いてマーガリンの製造工程の装置内の流動シミュレーションを行うために、接触モデルに組み込む多要素粘弾性(クリープ)モデルの定式化と離散化を行った。今後、作成した多要素粘弾性(クリープ)モデルのコーディングを行い、シミュレーション計算を行う必要がある。

謝 辞

本研究課題の一部は、平成20年度(財)杉山産業化学研究所の研究助成により行われた。(財)杉山産業化学研究所の関係者の皆様に深く御礼申し上げます。

参考文献

- 1) 伊藤博史, 清水賀之: 個別要素法を用いたマーガリンの製造工程シミュレーション, 東海大学海洋学部紀要, Vol.7, No.2, pp73-85, 2009.7
- 2) Shama, F. and Sherman, P. : An Automated Parallel-Plate Viscoelastometer for Studying the Rheological Properties of Solid Food Materials, Rheology and Texture of Foodstuffs, pp.77-89, 1968.